

第3章 | 微分法



第1節 導関数

1 微分係数と導関数

まとめ

3章

微分法

1 微分可能

関数 $f(x)$ について、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという。また、この値を関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 または変化率といい、 $f'(a)$ で表す。

2 微分係数

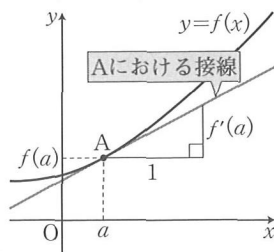
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

注意 $a+h=x$ とおくと $h=x-a$ であり、 $h \rightarrow 0$ のとき $x \rightarrow a$ となる。

3 接線の傾き

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能であるとき、微分係数 $f'(a)$ は曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の傾きを表す。

注意 連続な関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能でないとき、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線が存在しないか、または接線が x 軸に垂直である。



4 微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、 $x=a$ で連続である。ただし、この逆は成り立たない。すなわち、関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続であっても、 $x=a$ で微分可能であるとは限らない。

すなわち、グラフが $x=a$ でつながっていても、その点における接線が存在しないような関数 $f(x)$ がある。

成り立つ
微分可能 $\longrightarrow$ 連続
逆は成り立たない

5 区間で微分可能

関数 $f(x)$ が、ある区間のすべての x の値で微分可能であるとき、 $f(x)$ はその区間で微分可能であるという。

6 導関数

関数 $f(x)$ が、ある区間で微分可能であるとき、その区間の各値 a に微分係数 $f'(a)$ を対応させると、1つの新しい関数が得られる。この関数を、 $f(x)$ の導関数 といひ、記号 $f'(x)$ で表す。

7 $f(x)$ の導関数

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

8 導関数を表す記号

関数 $y=f(x)$ の導関数を y' , $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$ などの記号でも表す。

9 増分 Δx , Δy

関数 $y=f(x)$ において、 x の増分を表すのに、 h の代わりに Δx を用いることがある。

Δx に対応する y の増分 $f(x+\Delta x) - f(x)$ は Δy で表す。

このとき、関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

A 微分係数

教 p.70

練習

1

関数 $f(x) = \frac{1}{x}$ について、 $x=1$ における微分係数を定義に従って求めよ。

指針 微分係数 定義の式 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を用いる。

$$\begin{aligned} \text{解答 } f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - \frac{1}{1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - (1+h)}{h(1+h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{1+h} = -1 \quad \text{答} \end{aligned}$$

B 微分可能と連続

教 p.72

練習

2

関数 $f(x) = |x^2 - 1|$ は $x=1$ で微分可能でないことを示せ。

指針 微分可能でないことの証明 関数 $f(x)$ が $x=1$ で微分可能でないことを示すには、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ すなわち微分係数 $f'(1)$ が存在しないことをいえばよい。右側極限と左側極限を調べる。

解答 関数 $f(x)=|x^2-1|$ について、

$$\begin{aligned} & \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \frac{|(1+h)^2-1|-|1^2-1|}{h} \\ &= \frac{|2h+h^2|}{h} = \frac{|h(h+2)|}{h} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

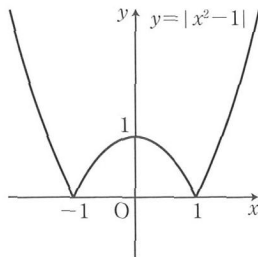
である。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h(h+2)|}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{h(h+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} (h+2) = 2 \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h(h+2)|}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{-h(h+2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} \{-(h+2)\} = -2 \end{aligned}$$

であるから、 $h \rightarrow 0$ のときの ① の極限はない。

したがって、関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ で微分可能でない。 〔終〕

補足 関数 $y=|x^2-1|$ のグラフでは、点 $(1, 0)$ における接線が存在しない。



← $h \rightarrow +0$ のとき
 $|h(h+2)| = h(h+2)$

← $h \rightarrow -0$ のとき
 $|h(h+2)| = -h(h+2)$



深める

教 p.72

関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=1$ 以外にも微分可能でない x の値が存在する。このことを確かめよう。

指針 微分可能でない x の値 関数 $y=|x^2-1|$ のグラフから、点 $(1, 0)$ と同様に、点 $(-1, 0)$ においても接線が存在しないことがわかる。

解答 関数 $f(x)=|x^2-1|$ について、

$$\begin{aligned} & \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \frac{|(-1+h)^2-1|-|(-1)^2-1|}{h} \\ &= \frac{|-2h+h^2|}{h} = \frac{|h(h-2)|}{h} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{|h(h-2)|}{h} &= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{-h(h-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow +0} \{-(h-2)\} = 2 \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{|h(h-2)|}{h} &= \lim_{h \rightarrow -0} \frac{h(h-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow -0} (h-2) = -2 \end{aligned}$$

であるから、 $h \rightarrow 0$ のときの ① の極限はない。

よって、関数 $f(x)=|x^2-1|$ は $x=-1$ で微分可能でない。 〔終〕

C 導関数

教 p.73

練習
3

導関数の定義に従って、次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = \frac{1}{2x}$

(2) $f(x) = \sqrt{x}$

指針 導関数の定義 定義の式は $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

解答 (1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2(x+h)} - \frac{1}{2x} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{x - (x+h)}{2(x+h)x} \right\}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(x+h)x} = -\frac{1}{2x^2} \quad \text{答}$$

(2) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{答}$$

2 導関数の計算

まとめ

1 微分する

関数 $f(x)$ から導関数 $f'(x)$ を求めることを、 $f(x)$ を x で微分する または単に 微分する という。

2 導関数の公式

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

① $\{kf(x)\}' = kf'(x)$ ただし、 k は定数

② $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

③ $\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$

④ $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3 x^n の導関数 (n は自然数)

n が自然数のとき $(x^n)' = nx^{n-1}$

4 商の導関数

関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

⑤ $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

⑥ $\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

5 x^n の導関数 (n は整数) n が整数のとき $(x^n)' = nx^{n-1}$ **注意** $n > 0$ の場合は、数学Ⅱで学習済み。 $n = 0$ の場合は、 $x^0 = 1$ であることから成り立つ。 $n < 0$ の場合は、 $n = -m$ とおくと、 m は正の整数であるから、公式[5]より次のように示せる。

$$\begin{aligned}(x^n)' &= \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}\end{aligned}$$

6 合成関数の微分法(1)

 $y=f(u)$ が u の関数として微分可能、 $u=g(x)$ が x の関数として微分可能であるとすると。このとき、合成関数 $y=f(g(x))$ は x の関数として微分可能で

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

7 合成関数の微分法(2)

公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ において

$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}', \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)), \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

と表すと

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

8 逆関数の微分法

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

注意 $\frac{dy}{dx}$ は1つの記号であり、決して分数ではないが、合成関数の微分法

やこの逆関数の微分法のように、形式的に分数のように扱える利点がある。

9 x^p の導関数 (p は有理数) p が有理数のとき $(x^p)' = px^{p-1}$ **注意** これでは、 $(x^n)' = nx^{n-1}$ の形の公式で、指数が自然数から整数、有理数へと拡張できた。

A 導関数の性質

教 p.75

練習
4

教科書 74 ページの公式 4 の証明にならって、公式 2 を証明せよ。

指針 $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ の証明 導関数の定義に従って、公式 4 の証明と同様に導く。

$$\begin{aligned}\text{解答 } \{f(x)+g(x)\}' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right\}\end{aligned}$$

ここで、 $f(x)$ 、 $g(x)$ はともに微分可能であるから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

よって $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$ 終

教 p.75

練習
5

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y=x^5+2x^4$$

$$(2) \quad y=3x^6-4x^3$$

$$(3) \quad y=(x+1)(x^3-4x)$$

$$(4) \quad y=(3x^2-2)(x^2+x+1)$$

指針 導関数の計算 (公式利用)

(1), (2) $(x^n)'=nx^{n-1}$ と教科書の導関数の公式 1, 2, 3 を組み合わせて使う。

(3), (4) まず導関数の公式 4 (積の導関数) を使う。

解答 (1) $y'=(x^5)' + 2(x^4)' = 5x^4 + 2 \cdot 4x^3 = 5x^4 + 8x^3$ 答

(2) $y'=3(x^6)' - 4(x^3)' = 3 \cdot 6x^5 - 4 \cdot 3x^2 = 18x^5 - 12x^2$ 答

(3) $y'=(x+1)'(x^3-4x) + (x+1)(x^3-4x)'$ ← 公式 4
 $=1 \cdot (x^3-4x) + (x+1)(3x^2-4)$
 $=x^3-4x+3x^3-4x+3x^2-4=4x^3+3x^2-8x-4$ 答

(4) $y'=(3x^2-2)'(x^2+x+1) + (3x^2-2)(x^2+x+1)'$ ← 公式 4
 $=6x(x^2+x+1) + (3x^2-2)(2x+1)$
 $=6x^3+6x^2+6x+6x^3+3x^2-4x-2=12x^3+9x^2+2x-2$ 答

別解 (3), (4) は展開してから微分してもよい。

(3) $y=x^4+x^3-4x^2-4x$ から $y'=4x^3+3x^2-8x-4$ 答

(4) $y=3x^4+3x^3+x^2-2x-2$ から $y'=12x^3+9x^2+2x-2$ 答

B 商の導関数

教 p.76

練習

6

 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ と教科書の公式 4, 5 を用いて公式 6 を証明せよ。

指針 商の導関数の公式の証明 問題文には書いていないが、関数 $f(x)$, $g(x)$ はともに微分可能である。まず、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を問題文のように $f(x)$ と $\frac{1}{g(x)}$ の積の形とみて導関数の公式 4 を用いる。

解答 関数 $f(x)$, $g(x)$ がともに微分可能であるとき

$$\left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\}' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' \quad \leftarrow \text{公式 4}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \cdot \left\{ -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \right\} \quad \leftarrow \text{公式 5}$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \quad \text{図}$$

3
章

微分法

練習

7

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{2x-3}$$

$$(2) \quad y = \frac{x}{x^2-2}$$

$$(3) \quad y = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

教 p.77

指針 商の導関数

$$\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}, \quad \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

解答 (1) $y' = -\frac{(2x-3)'}{(2x-3)^2} = -\frac{2}{(2x-3)^2}$ 図

$$(2) \quad y' = \frac{(x)'(x^2-2) - x(x^2-2)'}{(x^2-2)^2}$$

$$= \frac{1 \cdot (x^2-2) - x \cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

$$= -\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2} \quad \text{図}$$

$$(3) \quad y' = \frac{(2x-1)'(x^2+1) - (2x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2+1) - (2x-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2} \quad \text{図}$$

練習
8

教 p.77

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \frac{1}{x}$

(2) $y = -\frac{4}{x^2}$

(3) $y = \frac{1}{3x^3}$

指針 x^n の導関数 まず, $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$ とする。 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は, n が負の整数のときも成り立つ。

解答 (1) $y' = (x^{-1})' = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$ 答

(2) $y' = -4(x^{-2})' = -4(-2x^{-2-1}) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$ 答

(3) $y' = \frac{1}{3}(x^{-3})' = \frac{1}{3} \cdot (-3x^{-3-1}) = -x^{-4} = -\frac{1}{x^4}$ 答

C 合成関数の微分法

教 p.79

練習
9

次の関数を微分せよ。

(1) $y = (3x+1)^4$

(2) $y = \frac{1}{(4x+3)^2}$

指針 合成関数の微分法

(1) y を 2 つの関数 $y = u^4$, $u = 3x+1$ の合成関数とみて, 導関数は

公式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ を使って求める。

解答 (1) $u = 3x+1$ とすると $y = u^4$ であり

$$\frac{dy}{du} = 4u^3, \quad \frac{du}{dx} = 3$$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
 $= 4u^3 \cdot 3 = 12(3x+1)^3$ 答

(2) $u = 4x+3$ とすると $y = u^{-2}$ であり

$$\frac{dy}{du} = -2u^{-3}, \quad \frac{du}{dx} = 4$$

よって $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
 $= -2u^{-3} \cdot 4$
 $= -\frac{8}{(4x+3)^3}$ 答

合成関数の微分法を使えば
式を展開しなくても微分できるんだね。



練習
10

関数 $f(x)$, $g(x)$ とその導関数 $f'(x)$, $g'(x)$ について、次のことを示せ。
ただし、 a , b は定数, n は整数とする。

$$(1) \quad \frac{d}{dx} f(ax+b) = af'(ax+b) \quad (2) \quad \frac{d}{dx} \{g(x)\}^n = n\{g(x)\}^{n-1} g'(x)$$

指針 $f(ax+b)$, $\{g(x)\}^n$ の導関数 (1) $y=f(u)$, $u=ax+b$

(2) $y=u^n$, $u=g(x)$ として、合成関数の微分法の公式を利用する。

解答 (1) $y=f(u)$, $u=ax+b$ とする。

$$\frac{dy}{du} = f'(u), \quad \frac{du}{dx} = a \text{ であるから}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot a = af'(ax+b)$$

$$\text{よって } \frac{d}{dx} f(ax+b) = af'(ax+b) \quad \text{終}$$

(2) $y=u^n$, $u=g(x)$ とする。

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1}, \quad \frac{du}{dx} = g'(x) \text{ であるから}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = nu^{n-1} \cdot g'(x) = n\{g(x)\}^{n-1} g'(x)$$

$$\text{よって } \frac{d}{dx} \{g(x)\}^n = n\{g(x)\}^{n-1} g'(x) \quad \text{終}$$

別解 公式 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ を使うと、次のようになる。

$$(1) \quad \{f(ax+b)\}' = f'(ax+b) \cdot (ax+b)'$$

$$= af'(ax+b) \quad \text{終}$$

$$(2) \quad \{\{g(x)\}^n\}' = n\{g(x)\}^{n-1} \cdot g'(x)$$

$$= n\{g(x)\}^{n-1} g'(x) \quad \text{終}$$

練習
11

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = (2x^2 + 5)^4 \quad (2) \quad y = (1 - 2x^2)^3 \quad (3) \quad y = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$$

指針 合成関数の微分法 本問では、公式 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ を使って微分する。

解答 (1) $y' = 4(2x^2 + 5)^3 \cdot (2x^2 + 5)'$

$$= 4(2x^2 + 5)^3 \cdot 4x$$

$$= 16x(2x^2 + 5)^3 \quad \text{答}$$

(2) $y' = 3(1 - 2x^2)^2 \cdot (1 - 2x^2)'$

$$= 3(1 - 2x^2)^2 \cdot (-4x)$$

$$= -12x(1 - 2x^2)^2 \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad y' &= \{(x^2+1)^{-3}\}' = -3(x^2+1)^{-4} \cdot (x^2+1)' \\
 &= -3(x^2+1)^{-4} \cdot 2x \\
 &= -\frac{6x}{(x^2+1)^4} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

D 逆関数の微分法

教 p.81

練習
12逆関数の微分法を用いて、関数 $y = \sqrt[6]{x}$ を微分せよ。

指針 逆関数の微分法 関数を指数を使って表すと、 $y = x^{\frac{1}{6}}$ となる。ただし、公式 $(x^n)' = nx^{n-1}$ は現段階では n が整数の範囲でしか利用できない。
そこで、 $y = \sqrt[6]{x}$ を x について解き、逆関数の微分法の公式を使うことを考える。

解答 $y = \sqrt[6]{x}$ を x について解くと

$$x = y^6$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって} \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{6y^5} = \frac{1}{6(\sqrt[6]{x})^5} && \leftarrow (y^6)' = 6y^5 \\
 &= \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

E x^p の導関数

教 p.82

練習
13

次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \sqrt{x} \qquad (2) \quad y = \sqrt[3]{x^2} \qquad (3) \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

指針 x^p の導関数 $y = x^p$ の形で表し、 $(x^p)' = px^{p-1}$ を使う。 p が有理数(分数)であっても成り立つ公式である。

$$\begin{aligned}
 \text{解答} \quad (1) \quad y &= x^{\frac{1}{2}} \text{ から} \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{答} \\
 (2) \quad y &= x^{\frac{2}{3}} \text{ から} \quad y' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{答} \\
 (3) \quad y &= x^{-\frac{1}{2}} \text{ から} \quad y' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

練習
14

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sqrt[3]{(x+1)^2}$

(2) $y = \sqrt{4-x^2}$

指針 x^p の導関数 (合成関数の微分) (1) $y = (x+1)^{\frac{2}{3}}$ (2) $y = (4-x^2)^{\frac{1}{2}}$ として,
合成関数の微分法を用いる。

解答 (1) $y' = \left\{ (x+1)^{\frac{2}{3}} \right\}' = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x+1)' = \frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot 1$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x+1}} \quad \boxed{\text{答}}$$

(2) $y' = \left\{ (4-x^2)^{\frac{1}{2}} \right\}' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (4-x^2)' = \frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x)$

$$= -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \quad \boxed{\text{答}}$$

3
章

微分法

第3章 第1節

問 題

教 p.83

- 1 導関数の定義に従って、次の関数の導関数を求めよ。

$$y = \sqrt{x+1}$$

指針 導関数の定義 定義の式は $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$\begin{aligned} \text{解答 } y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)+1} - \sqrt{x+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \quad \text{答} \end{aligned}$$

教 p.83

- 2 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = (1-x^2)(2x^3+5)$$

$$(2) y = (2x+1)(3x^4-x^3+2)$$

指針 積の導関数 公式 $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ にあてはめて計算する。

$$\text{解答 } (1) y' = (1-x^2)'(2x^3+5) + (1-x^2)(2x^3+5)'$$

$$= -2x(2x^3+5) + (1-x^2) \cdot 6x^2$$

$$= -4x^4 - 10x + 6x^2 - 6x^4$$

$$= -10x^4 + 6x^2 - 10x \quad \text{答}$$

$$(2) y' = (2x+1)'(3x^4-x^3+2) + (2x+1)(3x^4-x^3+2)'$$

$$= 2(3x^4-x^3+2) + (2x+1)(12x^3-3x^2)$$

$$= 6x^4 - 2x^3 + 4 + 24x^4 - 6x^3 + 12x^3 - 3x^2$$

$$= 30x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 4 \quad \text{答}$$

教 p.83

- 3 関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ がいずれも微分可能であるとき、
関数 $y = f(x)g(x)h(x)$ の導関数は

$$y' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

であることを示せ。また、これを用いて、次の関数を微分せよ。

$$y = (x^2+1)(x+2)(3x-4)$$

指針 積の導関数 $y=f(x)g(x) \cdot h(x)$ と分けて、まず、 $f(x)g(x)$ と $h(x)$ の2つの関数の積として導関数を考える。

$$\begin{aligned}\text{解答 } y' &= \{f(x)g(x) \cdot h(x)\}' \\ &= \{f(x)g(x)\}' \cdot h(x) + \{f(x)g(x)\}h'(x) \\ &= \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} \cdot h(x) + f(x)g(x)h'(x) \\ &= f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x) \quad \text{終}\end{aligned}$$

また、 $y=(x^2+1)(x+2)(3x-4)$ について

$$\begin{aligned}y' &= (x^2+1)'(x+2)(3x-4) + (x^2+1)(x+2)'(3x-4) + (x^2+1)(x+2)(3x-4)' \\ &= 2x(x+2)(3x-4) + (x^2+1)(3x-4) + (x^2+1)(x+2) \cdot 3 \\ &= 6x^3 + 4x^2 - 16x + 3x^3 - 4x^2 + 3x - 4 + 3x^3 + 6x^2 + 3x + 6 \\ &= 12x^3 + 6x^2 - 10x + 2 \quad \text{答}\end{aligned}$$

$y=f(x) \cdot g(x)h(x)$ と分けても
同じ結果になるよ。



教 p.83

4 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(2) \quad y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$$

指針 商の導関数 公式 $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$, $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ にあてはめて計算する。

$$\text{解答 } (1) \quad y' = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad y' &= \frac{(x^2-5x+6)'(x+1) - (x^2-5x+6)(x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(2x-5)(x+1) - (x^2-5x+6) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-3x-5-x^2+5x-6}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+2x-11}{(x+1)^2} \quad \text{答}\end{aligned}$$

教 p.83

5 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$(2) \quad y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3$$

$$(3) \quad y = (x+2)^3(2x-1)^4$$

$$(4) \quad y = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

指針 合成関数の微分法 本問では、公式 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ を使って微分する。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad y' &= \left\{ \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 \right\}' \\
 &= 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)' \\
 &= 2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\
 &= -\frac{2}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \leftarrow \left(\frac{1}{x} \right)' &= (x^{-1})' \\
 &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y' &= \left\{ \left(x - \frac{1}{x} \right)^3 \right\}' \\
 &= 3 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right)' \\
 &= 3 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad y' &= \{(x+2)^3(2x-1)^4 + (x+2)^3\{(2x-1)^4\}' \\
 &= 3(x+2)^2(x+2)'(2x-1)^4 + (x+2)^3 \cdot 4(2x-1)^3 \cdot (2x-1)' \\
 &= 3(x+2)^2(2x-1)^4 + 8(x+2)^3(2x-1)^3 \\
 &= (x+2)^2(2x-1)^3\{3(2x-1) + 8(x+2)\} \\
 &= (x+2)^2(2x-1)^3(14x+13) \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad y' &= \frac{(x^2-2x)'(x-1)^2 - (x^2-2x)\{(x-1)^2\}'}{(x-1)^4} \\
 &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \\
 &= \frac{2(x-1)\{(x-1)^2 - (x^2-2x)\}}{(x-1)^4} \\
 &= \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.83

6 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

$$(2) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

指針 x^p の導関数 (合成関数の微分)(1) $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ として, 合成関数の微分法を用いる。(2) $y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ として, 合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned}
 \text{解答 (1)} \quad y' &= \left\{ (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} \right\}' \\
 &= \frac{1}{3} (x^2 + x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x^2 + x + 1)' \\
 &= \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

$$\leftarrow (u^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y' &= \left\{ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \right\}' \\
 &= -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} (1-x^2)' && \leftarrow \left(u^{-\frac{1}{2}} \right)' = -\frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}-1} \\
 &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) \\
 &= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad \boxed{\text{答}}
 \end{aligned}$$

教 p.83

3
章微
分
法

7 多項式 $f(x)$ を x の 2 次式 $(x-a)^2$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $bx+c$ とすると, 次の等式が成り立つ。

$$f(x) = (x-a)^2 Q(x) + bx + c$$

この両辺を x の関数とみて微分することにより, b, c をそれぞれ $a, f(a), f'(a)$ を用いて表せ。

指針 多項式を $(x-a)^2$ で割った余り $f(a), f'(a)$ を計算することにより, 余りの式の係数 b, c を $a, f(a), f'(a)$ で表すことができる。

解答 $f(x) = (x-a)^2 Q(x) + bx + c$ より

$$f(a) = ab + c$$

また, $f(x) = (x-a)^2 Q(x) + bx + c$ の両辺を x の関数とみて微分すると

$$f'(x) = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x) + b$$

$$\text{よって} \quad f'(a) = b$$

したがって

$$b = f'(a),$$

$$c = f(a) - ab = f(a) - af'(a) \quad \boxed{\text{答}}$$

第2節 いろいろな関数の導関数

3 いろいろな関数の導関数

まとめ

1 三角関数の導関数

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2 無理数 e

$k \rightarrow 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ は一定の値に限りなく近づくことが知られている。この極限値を e で表す。

$$e = \lim_{k \rightarrow 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}$$

注意 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ でも表される。

e は次のような数で、無理数であることが知られている。

$$e = 2.71828182845 \cdots$$

3 自然対数

e を底とする対数を 自然対数 という。

微分法や積分法では $\log_e x$ の底 e を省略して、 $\log x$ と書くことが多く、自然対数を単に対数ということもある。

4 対数関数の導関数

$a > 0$, $a \neq 1$ とする。

$$\text{① } (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{② } (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

注意 一般に、次のことが成り立つ。

$$\{\log f(x)\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

5 絶対値を含む対数関数の導関数

$a > 0$, $a \neq 1$ とする。

$$\text{③ } (\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\text{④ } (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

注意 一般に、次のことが成り立つ。

$$\{\log |f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

6 x^a の導関数

α が実数のとき $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x > 0)$

7 指数関数の導関数

 $a > 0, a \neq 1$ とする。

① $(e^x)' = e^x$

② $(a^x)' = a^x \log a$

A 三角関数の導関数

練習
15関数 $\cos x$ の導関数が、次のようになることを示せ。

$$(\cos x)' = -\sin x$$

教 p.84

3
章微
分
法指針 $\cos x$ の導関数 導関数の定義に従い

$$(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

として求める。 $\cos(x+h)$ には加法定理を使う。解答 $(\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ において

$$\begin{aligned} \cos(x+h) - \cos x &= \cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x \\ &= (\cos h - 1) \cos x - \sin x \sin h \end{aligned}$$

$$\text{であるから} \quad (\cos x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \cos x - \frac{\sin h}{h} \sin x \right)$$

$$\text{ここで, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} \right) = -1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad (\cos x)' = -\sin x \quad \text{終}$$

別解 $(\sin x)' = \cos x$ と合成関数の微分法を用いると

$$(\cos x)' = \left\{ \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right\}' = \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2} \right)' = -\sin x \quad \text{終}$$

練習
16

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \cos 2x$

(2) $y = \sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$

(3) $y = \sin^2 x$

(4) $y = \tan^2 x$

(5) $y = \frac{1}{\sin x}$

(6) $y = \cos^2 3x$

教 p.85

指針 三角関数の導関数 合成関数の微分法を利用する。(5)は商の導関数を考える。

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ を使う。

三角関数では導関数の表し方は必ずしも 1 通りでない。最も簡単な形がよいが、導関数の利用方法などによって使い分ける。

- 解答** (1) $y' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$ 答 $\leftarrow y = \cos u, u = 2x$
- (2) $y' = \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(3x + \frac{\pi}{4}\right)'$
 $= 3\sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ 答 $\leftarrow \begin{cases} y = \sqrt{2} \sin u \\ u = 3x + \frac{\pi}{4} \end{cases}$
- (3) $y' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x$
 $= \sin 2x$ 答 $\leftarrow y = u^2, u = \sin x$
 $\leftarrow 2$ 倍角の公式
- (4) $y' = 2 \tan x \cdot (\tan x)' = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$ 答 $\leftarrow y = u^2, u = \tan x$
- (5) $y' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$ 答 $\leftarrow \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
- (6) $y' = 2 \cos 3x \cdot (\cos 3x)'$
 $= 2 \cos 3x \cdot \{-\sin 3x \cdot (3x)'\}$
 $= -6 \cos 3x \sin 3x$
 $= -3 \sin 6x$ 答 $\leftarrow y = u^2, u = \cos 3x$
 $\leftarrow \cos 3x$ に合成関数の微分法を利用する。
 $\leftarrow 2$ 倍角の公式

注意 (2) $y = \sqrt{2} \left(\sin 3x \cos \frac{\pi}{4} + \cos 3x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sin 3x + \cos 3x$ とも表されるから
 $y' = 3 \cos 3x - 3 \sin 3x$

(4) $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ を使うと $y' = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

また、相互関係 $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ を使うと $y' = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$

(5) $\cos x$ だけで表すと $y' = -\frac{\cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x - 1}$

練習
17

次の関数を微分せよ。

(1) $y = x \sin x + \cos x$

(2) $y = x \cos x - \sin x$

指針 三角関数の導関数 導関数の公式を使う。

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x) \quad \{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

解答 (1) $y' = (x \sin x)' + (\cos x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' - \sin x$
 $= 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$ 答

(2) $y' = (x \cos x)' - (\sin x)' = (x)' \cos x + x(\cos x)' - \cos x$
 $= 1 \cdot \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$ 答

教 p.85



教科書の例題 3 (2) を, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ を利用して解いてみよう。

解答 $y' = (\cos^2 x)' = \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)' = \frac{1}{2} \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = -\sin 2x$ 答

B 対数関数の導関数



次の関数を微分せよ。

(1) $y = \log 3x$

(2) $y = \log_2 (4x-1)$

(3) $y = \log (x^2+1)$

(4) $y = x \log x - x$

指針 対数関数の導関数

(1)~(3) 真数を u とみて合成関数の微分法の公式を利用する。

$$\frac{d}{du} \log u = \frac{1}{u}, \quad \frac{d}{du} \log_a u = \frac{1}{u \log a}$$

解答 (1) $y' = \frac{1}{3x} \cdot (3x)' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$ 答

← $\begin{cases} y = \log u \\ u = 3x \end{cases}$

(2) $y' = \frac{1}{(4x-1)\log 2} \cdot (4x-1)' = \frac{4}{(4x-1)\log 2}$ 答

← $\begin{cases} y = \log_2 u \\ u = 4x-1 \end{cases}$

(3) $y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}$ 答

← $\begin{cases} y = \log u \\ u = x^2+1 \end{cases}$

(4) $y' = (x \log x)' - (x)' = (x)' \log x + x(\log x)' - 1$

← 積の導関数

$$= 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x$$
 答

C 対数関数の導関数の応用



$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \log a}$ であることを示せ。ただし, a は 1 でない正の定数とする。

指針 $\log_a |x|$ の導関数 (公式の証明) 自然対数 $\log |x|$ の導関数についての教科書の公式 3 の証明は教科書 p.88 にある。同様にして, 公式 2 を使って証明する。

解答 $x > 0$ のとき $(\log_a |x|)' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$

← 公式 2

$x < 0$ のとき $(\log_a |x|)' = \{\log_a (-x)\}' = \frac{(-x)'}{-x \log a}$

← 合成関数の微分法

$$= \frac{-1}{-x \log a} = \frac{1}{x \log a}$$

$$\text{よって } (|\log_a x|)' = \frac{1}{x \log a} \quad \text{終}$$

$$\text{別解 } \log_a |x| = \frac{\log_e |x|}{\log_e a} = \frac{\log |x|}{\log a} \text{ であるから}$$

← 底の変換公式

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a}$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{\log a} \cdot (\log |x|)' = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \log a} \quad \text{終}$$

← 公式 3

練習 20

次の関数を微分せよ。

$$(1) \ y = \log|3x+2| \quad (2) \ y = \log|\sin x| \quad (3) \ y = \log_2|x^2-4|$$

指針 絶対値を含む対数関数の導関数 合成関数の微分法の公式を利用する。底の違いに注意すること。

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a|x|)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$\text{解答 } (1) \ y' = \frac{1}{3x+2} \cdot (3x+2)' = \frac{3}{3x+2} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$(2) \ y' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{答}$$

$$(3) \ y' = \frac{1}{(x^2-4)\log 2} \cdot (x^2-4)' = \frac{2x}{(x^2-4)\log 2} \quad \text{答}$$

練習 21

$\log|y|$ の導関数を利用して、次の関数を微分せよ。

$$(1) \ y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2} \quad (2) \ y = \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$$

指針 対数関数の微分の利用(対数微分法) 次の手順で導関数 y' を求める。

- ① 両辺の絶対値の自然対数をとる。右辺は、数学Ⅱで学んだ対数の性質を使い、真数が簡単な形の対数の和や差の形にする。
- ② 両辺をそれぞれ x で微分する。左辺は $(\log|y|)'$ より $\frac{y'}{y}$ となる。
- ③ y' が求める導関数であるから、両辺に y を掛け、その y をもとの x の関数にもどしておく。

解答 (1) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 3\log|x+1| - \log|x-1| - 2\log|x+2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+2}$$

教 p.89

$$= \frac{3(x-1)(x+2) - (x+1)(x+2) - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$= -\frac{6}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

よって $y' = -\frac{6}{(x+1)(x-1)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^3}{(x-1)(x+2)^2}$

$$= -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^2(x+2)^3} \quad \text{答}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = \frac{1}{2} \log|x+2| - \log|x+1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1) - 2(x+2)}{2(x+2)(x+1)}$$

$$= \frac{-(x+3)}{2(x+2)(x+1)}$$

よって $y' = -\frac{x+3}{2(x+2)(x+1)} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

$$= -\frac{x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}} \quad \text{答}$$

$\log MN = \log M + \log N$
 $\log \frac{M}{N} = \log M - \log N$
 $\log M^p = p \log M$
 だね。



別解 (2) $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{-1}$ であるから

$$y' = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}(x+1)^{-1} + (x+2)^{\frac{1}{2}}\{- (x+1)^{-2}\}$$

$$= \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x+2}}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - 2(x+2)}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}} = -\frac{x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x+2}} \quad \text{答}$$

練習
22

教科書 89 ページの次の公式を証明せよ。

α が実数のとき $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (ただし, $x > 0$)

指針 x^α の導関数 $y = x^\alpha$ において, 両辺の自然対数を取り, 両辺をそれぞれ x で微分する。左辺は $\frac{y'}{y}$ となるので, 両辺に y を掛け, その y をもとの x の関数にもどしておく。

解答 $x > 0$ より, $x^\alpha > 0$ であるから, $y = x^\alpha$ において, 両辺の自然対数をとると

$$\log y = \alpha \log x$$

$$\leftarrow \log M^p = p \log M$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \quad \text{すなわち} \quad y' = \alpha \cdot \frac{y}{x}$$

よって $(x^\alpha)' = \alpha \cdot \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{答}$

注意 $x^\alpha > 0$ であるから, そのまま両辺の自然対数をとったが, 一般には両辺の絶

対値の自然対数をとる。

D 指数関数の導関数

教 p.90

練習
23次の関数を微分せよ。ただし、(6)の a は1でない正の定数とする。

(1) $y=e^{2x}$

(2) $y=e^{-x^2}$

(3) $y=3^x$

(4) $y=2^{-3x}$

(5) $y=xe^x$

(6) $y=(2x-1)a^x$

指針 指数関数の導関数 (1), (2), (4) は指数を u とみて合成関数の微分法を利用する。(3) は指数関数の導関数の公式 2 を利用する。(5), (6) は積の導関数を考える。

解答 (1) $y'=e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$ 答

$\leftarrow y=e^u, u=2x$

(2) $y'=e^{-x^2} \cdot (-x^2)' = -2xe^{-x^2}$ 答

$\frac{d}{du} e^u = e^u$

(3) $y'=3^x \log 3$ 答

(4) $y'=2^{-3x} \log 2 \cdot (-3x)' = -3 \cdot 2^{-3x} \log 2$ 答

(5) $y'=1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x$ 答

(6) $y'=2 \cdot a^x + (2x-1)a^x \log a = \{2 + (2x-1) \log a\} a^x$ 答

教 p.90

深
める

a は1でない正の定数とする。指数関数 $y=a^x$ の導関数を、教科書 89 ページの対数微分法を利用して求めてみよう。

解答 $y=a^x > 0$ より、両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log a^x \quad \text{すなわち} \quad \log y = x \log a$$

両辺の関数を x で微分すると $\frac{y'}{y} = \log a$

よって $y' = y \log a = a^x \log a$ 答

4 第 n 次導関数

まとめ

1 第2次導関数

関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき、さらに微分して得られる導関数を、関数 $y=f(x)$ の第2次導関数といい、 y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$,

$\frac{d^2}{dx^2} f(x)$ などの記号で表す。

2 第3次導関数

第2次導関数 $f''(x)$ の導関数を関数 $y=f(x)$ の第3次導関数といい、 y''' 、 $f'''(x)$ 、 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 、 $\frac{d^3}{dx^3}f(x)$ などの記号で表す。

注意 y' 、 $f'(x)$ などを第1次導関数ということがある。

3 第 n 次導関数

関数 $y=f(x)$ を n 回微分して得られる関数を、 $y=f(x)$ の第 n 次導関数といい、 $y^{(n)}$ 、 $f^{(n)}(x)$ 、 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 、 $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ などの記号で表す。なお、 $y^{(1)}$ 、 $y^{(2)}$ 、 $y^{(3)}$ は、それぞれ y' 、 y'' 、 y''' を表す。

練習
24

教 p.92

次の関数について、第3次までの導関数を求めよ。

- | | | |
|------------------|---------------------|-----------------|
| (1) $y=x^3-2x+5$ | (2) $y=\frac{1}{x}$ | (3) $y=\cos x$ |
| (4) $y=\log x$ | (5) $y=e^x$ | (6) $y=e^{-2x}$ |

指針 第3次までの導関数 いろいろな関数があるから、それぞれの導関数の公式に従って、3回ずつ微分していく。(6)は合成関数である。

解答 (1) $y'=3x^2-2$ 、 $y''=6x$ 、 $y'''=6$ 答

$$(2) \quad y'=(x^{-1})'=-x^{-2} \quad y''=-(-2x^{-3})=2x^{-3}$$

$$y'''=2(-3x^{-4})=-6x^{-4}$$

$$\text{よって } y'=-\frac{1}{x^2}, y''=\frac{2}{x^3}, y'''=-\frac{6}{x^4} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad y'=-\sin x, y''=-\cos x, y'''=\sin x \quad \text{答}$$

$$\leftarrow y'''=-(-\sin x)$$

$$(4) \quad y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}, y'''=\frac{2}{x^3} \quad \text{答}$$

$$(5) \quad y'=e^x, y''=e^x, y'''=e^x \quad \text{答}$$

$$(6) \quad y'=e^{-2x} \cdot (-2x)'=-2e^{-2x}$$

$$y''=-2e^{-2x} \cdot (-2x)'=4e^{-2x}$$

$$y'''=4e^{-2x} \cdot (-2x)'=-8e^{-2x}$$

$$\text{よって } y'=-2e^{-2x}, y''=4e^{-2x}, y'''=-8e^{-2x} \quad \text{答}$$

注意 (2) 商の導関数の公式を使って求めてもよい。

$$y'=-\frac{(x)'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$y''=-\left\{-\frac{(x^2)'}{x^4}\right\}=\frac{2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}$$

$$y'''=2\left\{-\frac{(x^3)'}{x^6}\right\}=-\frac{6x^2}{x^6}=-\frac{6}{x^4}$$

練習
25次の関数の第 n 次導関数を求めよ。

(1) $y = x^n$

(2) $y = e^{2x}$

指針 第 n 次導関数 規則性が確かめられるまで微分を繰り返し、第 n 次導関数を推測する。

解答 (1) $y' = nx^{n-1}$
 $y'' = n(n-1)x^{n-2}$
 $y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
 $\dots\dots$

よって $y^{(n)} = n(n-1)(n-2) \cdots \cdots 2 \cdot 1 = n!$ 答

(2) $y' = e^{2x} \cdot (2x)' = 2e^{2x}$
 $y'' = 2e^{2x} \cdot (2x)' = 2^2 e^{2x}$
 $y''' = 2^2 e^{2x} \cdot (2x)' = 2^3 e^{2x}$
 $\dots\dots$

よって $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$ 答

〔参考〕求めた $y^{(n)}$ が正しいことは数学的帰納法で証明できる。

(1) $y^{(n)} = n! \cdots \cdots$ ①

$n=1$ のとき、 $y^{(1)} = (x)' = 1$ であるから、① は成り立つ。

$n=k$ のとき ① が成り立つ、すなわち $y^{(k)} = (x^k)^{(k)} = k!$

と仮定すると、 $y = x^{k+1}$ について、 $y^{(1)} = (k+1)x^k$ より

$$y^{(k+1)} = \{y^{(1)}\}^{(k)} = \{(k+1)x^k\}^{(k)} = (k+1)(x^k)^{(k)}$$

$$= (k+1) \cdot k! = (k+1)!$$

よって、 $n=k+1$ のときも ① が成り立つ。

したがって、すべての自然数 n について ① は成り立つ。

(2) $y^{(n)} = 2^n e^{2x} \cdots \cdots$ ②

$n=1$ のとき、 $y^{(1)} = (e^{2x})' = 2e^{2x}$ であるから、② は成り立つ。

$n=k$ のとき ② が成り立つ、すなわち $y^{(k)} = 2^k e^{2x}$

と仮定すると

$$y^{(k+1)} = \{y^{(k)}\}^{(1)} = (2^k e^{2x})' = 2^k \cdot 2e^{2x}$$

$$= 2^{k+1} e^{2x}$$

よって、 $n=k+1$ のときも ② が成り立つ。

したがって、すべての自然数 n について ② は成り立つ。

5 曲線の方程式と導関数

まとめ

1 x, y の方程式と導関数

x, y の方程式が与えられたとき、この方程式は x の関数 y を定めると考え、合成関数の微分法により、 $\frac{dy}{dx}$ を求めることができる。

2 曲線の媒介変数表示

曲線 C 上の点 $P(x, y)$ の座標が、変数 t によって

$$x=f(t), y=g(t)$$

の形に表されるとき、これを曲線 C の 媒介変数表示 といい、変数 t を 媒介変数 または パラメータ という。

3 媒介変数表示と導関数

$$x=f(t), y=g(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

A x, y の方程式と導関数

教 p.93

練習
26

放物線 $y^2 = -8x$ について、次の問いに答えよ。

(1) 方程式を y について解け。

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{y}$ であることを示せ。

指針 x, y の方程式と導関数

(2) x で微分し、右辺の x を y の式で表して、 $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{y}$ となることを示す。

解答 (1) $y = \pm\sqrt{-8x}$ 答

(2) [1] $y = \sqrt{-8x}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-8x}} \cdot (-8) = -\frac{4}{\sqrt{-8x}} = -\frac{4}{y}$$

[2] $y = -\sqrt{-8x}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-8x}} \cdot (-8) = -\frac{4}{-\sqrt{-8x}} = -\frac{4}{y}$$

[1], [2] より $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{y}$ 終



放物線 $y^2=4x$ 上の原点以外の点 (a, b) における接線の傾きを求めてみよう。

指針 接線の傾き $x=a$ または $y=b$ のときの $\frac{dy}{dx}$ の値が点 (a, b) における接線の傾きである。

解答 方程式 $y^2=4x$ を y について解くと $y=\pm 2\sqrt{x}$

よって、放物線 $y^2=4x$ は、2つの関数

$$y=2\sqrt{x} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y=-2\sqrt{x} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

のグラフを合わせたものである。

関数 $\textcircled{1}$ を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

関数 $\textcircled{2}$ を x で微分すると

$$\frac{dy}{dx}=-2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{-2\sqrt{x}} = \frac{2}{y}$$

よって、放物線 $y^2=4x$ 上の原点以外の点 (a, b) における接線の傾きは

$$b>0 \text{ のとき } \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad b<0 \text{ のとき } -\frac{1}{\sqrt{a}}$$

または $\frac{2}{b}$ 答

逆関数の微分法でも
求めてみよう。



練習

27

次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(1) $x^2+y^2=1$

(2) $x^2-y^2=1$

指針 x, y の方程式と導関数 y を x の関数と考え、方程式の両辺を x で微分する。
合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

解答 (1) $x^2+y^2=1$ の両辺を x で微分すると $2x+2y \frac{dy}{dx}=0$

よって、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 答

$$(2) \quad x^2 - y^2 = 1 \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると} \quad 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{よって, } y \neq 0 \text{ のとき} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \quad \text{答}$$

注意 (2) の方程式が表す曲線は, 2 直線 $x \pm y = 0$ を漸近線とする双曲線である。

「 $y \neq 0$ のとき」を忘れないようにしましょう。



3 章

微分法

B 媒介変数表示と導関数

教 p.96

練習 28

x の関数 y が, t を媒介変数として, 次の式で表されるとき, $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

$$(1) \quad x = 2t^2, \quad y = 2t - 1$$

$$(2) \quad x = \cos t, \quad y = \sin t$$

指針 曲線の媒介変数表示と導関数 $\frac{dx}{dt} = f'(t), \frac{dy}{dt} = g'(t)$ をそれぞれ求め,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \text{ とすればよい。}$$

解答 (1) $\frac{dx}{dt} = 4t, \frac{dy}{dt} = 2$ から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{4t} = \frac{1}{2t} \quad \text{答}$$

(2) $\frac{dx}{dt} = -\sin t, \frac{dy}{dt} = \cos t$ から

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos t}{\sin t} \quad \text{答}$$

補足 (1) 放物線 $(y+1)^2 = 2x$ を表す。

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ を表す。

第3章 第2節

問題

教 p.97

8 次の関数を微分せよ。ただし、(6)の a は1でない正の定数とする。

$$(1) y = \frac{1}{1 + \cos x} \quad (2) y = \sin^2 x \cos 2x \quad (3) y = (\log x)^2$$

$$(4) y = \log \left| \frac{x+1}{x+2} \right| \quad (5) y = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad (6) y = a^{2x+1}$$

指針 いろいろな関数の導関数 三角関数、対数関数、指数関数を含む関数の導関数を求める。(1), (5)は商の導関数, (2)は積の導関数であり, (2), (3), (4), (6)では合成関数の微分法も使う。

解答 (1) $y' = -\frac{(1 + \cos x)'}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\sin x}{(1 + \cos x)^2}$ 答 $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

(2) $y' = (\sin^2 x)' \cos 2x + \sin^2 x (\cos 2x)'$ $\leftarrow (fg)' = f'g + fg'$
 $= 2 \sin x (\sin x)' \cdot \cos 2x + \sin^2 x \cdot (-\sin 2x)(2x)'$
 $= 2 \sin x \cos x \cos 2x - 2 \sin^2 x \sin 2x$
 $= \sin 2x (1 - 2 \sin^2 x) - 2 \sin^2 x \sin 2x$ $\leftarrow 2$ 倍角の公式
 $= \sin 2x (1 - 4 \sin^2 x)$ 答

(3) $y' = 2 \log x \cdot (\log x)' = \frac{2 \log x}{x}$ 答 $\leftarrow \begin{cases} y = u^2 \\ u = \log x \end{cases}$

(4) $y = \log|x+1| - \log|x+2|$ であるから
 $y' = \frac{(x+1)'}{x+1} - \frac{(x+2)'}{x+2} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ $\leftarrow (\log|f|)' = \frac{f'}{f}$
 $= \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$ 答

(5) $y' = \frac{(e^x)'(e^x + 1) - (e^x)(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2}$ $\leftarrow \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
 $= \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ 答

(6) $y' = a^{2x+1} \log a \cdot (2x+1)'$ $\leftarrow \begin{cases} y = a^u \\ u = 2x+1 \end{cases}$
 $= 2a^{2x+1} \log a$ 答

注意 右の $\leftarrow$ では, $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ f , g と略記した。

教 p.97

9 a は定数とする。次のことを示せ。

$$\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 + a}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

指針 対数関数の微分 真数がやや複雑な形の関数であるから, ここではこれを u とおいて, 合成関数の微分をていねいに行う。

解答 $u = x + \sqrt{x^2 + a}$, $y = \log u$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \left\{ x + (x^2 + a)^{\frac{1}{2}} \right\}' = 1 + \frac{1}{2}(x^2 + a)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2 + a)' \\ &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + a}} \cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}}\end{aligned}$$

また, $\frac{dy}{du} = \frac{1}{u} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}}$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a} + x}{\sqrt{x^2 + a}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$$

よって $\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 + a}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$ 図

教 p.97

10 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2$$

$$(2) \quad y = (x - 1)^2 \cdot \sqrt[3]{x + 2}$$

指針 対数を利用した微分

両辺の絶対値の自然対数を取り, 両辺をそれぞれ x で微分する。

解答 (1) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 2\log|x^2 - 1| - 2\log|x^2 + 1|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{4x}{x^2 - 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} = \frac{8x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

$$\text{よって} \quad y' = \frac{8x}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)} \cdot \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 = \frac{8x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} \quad \text{図}$$

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log|y| = 2\log|x - 1| + \frac{1}{3}\log|x + 2|$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{3(x + 2)} = \frac{7x + 11}{3(x - 1)(x + 2)}$$

$$\text{よって} \quad y' = \frac{7x + 11}{3(x - 1)(x + 2)} \cdot (x - 1)^2 \cdot \sqrt[3]{x + 2} = \frac{(7x + 11)(x - 1)}{3\sqrt[3]{(x + 2)^2}} \quad \text{図}$$

別解 (1) $y' = 2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)'$

$$= 2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{(x^2 - 1)'(x^2 + 1) - (x^2 - 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= 2 \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{2x(x^2 + 1) - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{8x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3} \quad \text{図}$$

$$(2) \quad y' = \{(x - 1)^2\}'(x + 2)^{\frac{1}{3}} + (x - 1)^2 \{(x + 2)^{\frac{1}{3}}\}'$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(x-1)(x+2)^{\frac{1}{3}} + (x-1)^2 \cdot \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} \{6(x-1)(x+2) + (x-1)^2\} \\
 &= \frac{7x^2+4x-11}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} = \frac{(7x+11)(x-1)}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}} \quad \text{答}
 \end{aligned}$$

教 p.97

11 関数 $y=e^x(\sin x+\cos x)$ について、次の等式が成り立つことを示せ。

$$y''-2y'+2y=0$$

指針 導関数が満たす等式の証明 y' , y'' を求めて左辺に代入し、証明する。どちらの微分にも積の導関数の公式を利用する。

解答 $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$
 $=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x \cos x$
 $y''=2(e^x)' \cos x+2e^x(\cos x)'=2e^x(\cos x-\sin x)$
 よって $y''-2y'+2y$
 $=2e^x(\cos x-\sin x)-4e^x \cos x+2e^x(\sin x+\cos x)=0 \quad \text{答}$

教 p.97

12 次の方程式で定められる x の関数 y について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

$$(x-1)^2+y^2=16$$

指針 x , y の方程式と導関数 y を x の関数と考え、方程式の両辺を x で微分する。

合成関数の微分法により $\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dx}=2y \frac{dy}{dx}$

解答 $(x-1)^2+y^2=16$ の両辺を x で微分すると $2(x-1)+2y \frac{dy}{dx}=0$

よって、 $y \neq 0$ のとき $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-1}{y} \quad \text{答}$

教 p.97

13 x の関数 y が、 t を媒介変数として、次の式で表されるとき、 $\frac{dy}{dx}$ を t の関数として表せ。

(1) $x=\frac{1}{\cos t}$, $y=\tan t$

(2) $x=t+\frac{1}{t}$, $y=t-\frac{1}{t}$

指針 媒介変数表示と導関数 $x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき $\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)$ をそれ

ぞれ求め、 $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$ とすればよい。

解答 (1) $\frac{dx}{dt} = -\frac{(\cos t)'}{\cos^2 t} = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$ から $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos^2 t}} = \frac{1}{\sin t}$ 答

(2) $\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2}$ から $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}$ 答

注意 (1) 双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ を表す。

(2) 双曲線 $x^2 - y^2 = 4$ を表す。

教 p.97

14 関数 $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $f(x)$ とする。 $f'(x)$ を求めたい

が、 $f(x)$ はこれまでに学んだ関数で表すことができない。

(1) $f(x)$ の定義域、値域を求めよ。

(2) $y = f(x)$ について、 $\frac{dx}{dy}$ を y の関数として表せ。

(3) $f'(x)$ を x の関数として表せ。

指針 関数 $y = \sin x$ の逆関数の導関数 関数 $y = \sin x$ の逆関数はこれまでに学んだ関数で表すことはできないが、その導関数は、逆関数の微分法を用いて求めることができる。

解答 (1) $y = \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ の値域は $-1 < y < 1$

よって、 $f(x)$ の定義域は $-1 < x < 1$ 、値域は $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ 答

(2) $y = f(x)$ のとき、 $x = \sin y$ であるから

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad \text{答}$$

(3) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ において $\cos y > 0$ より

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

よって

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{答}$$

$f'(x)$ を $\sin y$ の式で表し、
 $\sin y = x$ で置き換えるよ。



第3章 章末問題A

教 p.98

1. 導関数の定義に従って、関数 $y=x\sqrt{x}$ の導関数を求めよ。

指針 導関数の定義 $f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を使う。分子を有理化して極限值を求めることになる。

$$\begin{aligned} \text{解答 } y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}\}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h\{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}\}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3xh + h^2}{(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad \text{答} \end{aligned}$$

← 分母と分子に $(x+h)\sqrt{x+h} + x\sqrt{x}$ を掛ける。

注意 $\frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} = x \cdot \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} + \sqrt{x+h}$

と変形して

$$h \rightarrow 0 \text{ のとき } \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

を示してもよい。

教 p.98

2. 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}}$$

$$(2) y = \sqrt{1 + \cos x}$$

$$(3) y = \frac{\sin x}{x}$$

$$(4) y = 2^{\log x}$$

指針 いろいろな関数の微分

(1), (3) 商の導関数の公式を使う。

(2), (4) 合成関数の微分法を考える。

$$\begin{aligned} \text{解答 } (1) y' &= \frac{(x^2+x+1)'\sqrt{x} - (x^2+x+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ (2x+1)\sqrt{x} - \frac{x^2+x+1}{2\sqrt{x}} \right\} \\ &= \frac{2x(2x+1) - (x^2+x+1)}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2+x-1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{fg' - fg'}{g^2}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$(2) \quad y' = \frac{(1+\cos x)'}{2\sqrt{1+\cos x}} = -\frac{\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow y = u^{\frac{1}{2}} \\ u = 1 + \cos x$$

$$(3) \quad y' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad \text{答}$$

$$(4) \quad y' = 2^{\log x} \log 2 \cdot (\log x)' = \frac{2^{\log x} \log 2}{x} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow y = 2^u \\ u = \log x$$

別解 (1) $y = x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 + x - 1}{2x\sqrt{x}} \quad \text{答} \end{aligned}$$

注意 右の $\leftarrow$ では, $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ f , g と略記した。

教 p.98

3. 関数 $f(x)$, $g(x)$ の第2次導関数が存在するとき, 次のことを示せ。

$$\frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} = f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$$

指針 積の第2次導関数 積の導関数の公式の両辺をさらに x で微分する。積の導関数の公式を繰り返し用いることになる。

解答 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\{f(x)g(x)\} &= \{f'(x)g(x)\}' + \{f(x)g'(x)\}' \\ &= \{f''(x)g(x) + f'(x)g'(x)\} + \{f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)\} \\ &= f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) \quad \text{終} \end{aligned}$$

参考 $f^{(0)}(x) = f(x)$, $g^{(0)}(x) = g(x)$ とするとき

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

が成り立つ。これをライプニッツの公式という。

教 p.98

4. 次の関数について, y' および y'' を求めよ。

$$(1) \quad y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$(2) \quad y = e^{-2x^2}$$

指針 第2次までの導関数 (1)は商の導関数, (2)は指数関数の導関数の公式に従って, 2回ずつ微分する。また, (2)は合成関数の微分法を考える。

解答 (1) $y = \frac{x^2-1+1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ より

$$y' = (x)' + (1)' + \left(\frac{1}{x-1}\right)' = 1 - \frac{(x-1)'}{(x-1)^2} \quad \leftarrow \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \quad \text{答}$$

$$\begin{aligned} y'' &= (1)' - \left\{ \frac{1}{(x-1)^2} \right\}' = -\{(x-1)^{-2}\}' \\ &= -\{-2(x-1)^{-3}(x-1)\}' \\ &= \frac{2}{(x-1)^3} \quad \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \quad y' = e^{-2x^2} \cdot (-2x^2)' = -4xe^{-2x^2} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow y = e^u, \quad u = -2x^2$$

$$\begin{aligned} y'' &= (-4x)'e^{-2x^2} - 4x(e^{-2x^2})' \\ &= -4e^{-2x^2} - 4xe^{-2x^2} \cdot (-4x) = 4(4x^2 - 1)e^{-2x^2} \quad \text{答} \end{aligned}$$

注意 右の<では, $g(x)$ を g と略記した。

教 p.98

5. n を正の整数とすると, $x \neq 1$ のとき, 次の等式が成り立つ。

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

この両辺を x の関数とみて微分し, $x \neq 1$ のとき, 次の和を求めよ。

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

指針 微分の利用 求める和は, 等式の左辺の導関数であるから, 右辺の導関数と等しい。右辺の微分は商の導関数の公式を使う。

解答 等式の左辺を微分すると $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$

これは求める和である。等式の右辺を微分すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' &= \frac{(1 - x^{n+1})'(1 - x) - (1 - x^{n+1})(1 - x)'}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1 - x) + (1 - x^{n+1})}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1 - x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2} \quad \text{答}$$

注意 微分を使わず, 数列の和として求めると, 次のようになる。

求める和を S とする。

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1}$$

$$xS = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

辺々を引くと

$$\begin{aligned} (1-x)S &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} - nx^n \\ &= \frac{1 - x^n}{1 - x} - nx^n = \frac{1 - x^n - nx^n(1 - x)}{1 - x} \end{aligned}$$

$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{1-x}$$

$$1-x \neq 0 \text{ であるから } S = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$$

教 p.98

6. 関数 $f(x) = \sin x$ について、次のことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

指針 第 n 次導関数の証明 三角関数で成り立つ等式のうち、

$$\cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \text{ を使うと, } f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$f''(x) = \left\{ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right\}' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$f'''(x) = \left\{ \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) \right\}' = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \sin\left\{\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

となる。数学的帰納法で、 $n=k$ (仮定) から $n=k+1$ を導くときにも上と同様の変形を考える。

解答 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \dots\dots ①$ とする。

[1] $n=1$ のとき

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \leftarrow \cos \theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

よって、① は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき ① が成り立つ、すなわち

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \quad \leftarrow \text{右辺} = \sin u$$

であると仮定する。この両辺を x で微分すると

$$u = x + \frac{k\pi}{2}$$

$$f^{(k+1)}(x) = \cos\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) \quad \leftarrow \left(x + \frac{k\pi}{2}\right)' = 1$$

$$= \sin\left\{\left(x + \frac{k\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$= \sin\left\{x + \frac{(k+1)\pi}{2}\right\}$$

よって、 $n=k+1$ のときも ① は成り立つ。

[1], [2] から、すべての自然数 n について ① が成り立つ。 終

7. a, b は正の定数とする。次のことを示せ。

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$(2) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

指針 x, y の方程式と導関数 y を x の関数と考え、方程式の両辺を x で微分する。

合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

解答 (1) 方程式の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

よって、 $y \neq 0$ のとき

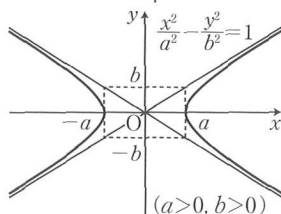
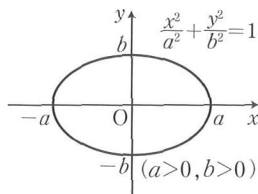
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \quad \text{終}$$

(2) 方程式の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

よって、 $y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad \text{終}$$



補足 (1) 方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) は、楕円の標準形を表す。

(2) 方程式 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) は、双曲線の標準形を表す。

漸近線は 2 直線 $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$

第3章 章末問題B

教 p.99

8. $x=a$ で微分可能な関数 $f(x)$ について、次のことを示せ。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$$

指針 極限值と微分係数 微分係数 $f'(a)$ は、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ で定義される。与式の左辺にこの形を作ることを考える。

すなわち、分子から $f(a)$ を引き、等号を保つために $f(a)$ を加える。

$$\begin{aligned} \text{解答} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{-h} \\ &= f'(a) + f'(a) = 2f'(a) \quad \text{終} \end{aligned}$$

注意 $k = -h$ とすると $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = f'(a)$

3章

微分法

教 p.99

9. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

指針 極限值と微分係数 $\log 1 = 0$, $e^0 = 1$ に注意すると、与式は

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log 1}{x - 0} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} \quad \text{とも表される。}$$

関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数の定義

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

と比べると、 $a=0$ の場合であることがわかる。それぞれ $f(x)$ にあたる関数を定めて、微分係数を調べる。

解答 (1) $f(x) = \log(1+x)$ とすると、 $f(0) = \log 1 = 0$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x) - \log 1}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{より} \quad f'(0) = 1$$

$$\text{よって} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{答}$$

(2) $g(x)=e^x$ とすると, $g(0)=e^0=1$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0)$$

$$g'(x) = e^x \text{ より } g'(0) = e^0 = 1$$

$$\text{よって } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{答}$$

別解 (1) $\frac{\log(1+x)}{x} = \frac{1}{x} \log(1+x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ であり,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ であるから } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \log e = 1 \quad \text{答}$$

教 p.99

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であることを用いて, 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

指針 e の定義を用いた極限 (1) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^2$

(2) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ を $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ の形にするために $2n=t$ とおくと,

$n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ となる。

(3) $\frac{n}{2} = t$ とおくと, $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t}$ となり, (1) と同じ形になる。

解答 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^2 = e^2 \quad \text{答}$

(2) $2n=t$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であり

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{e} \quad \text{答} \end{aligned}$$

(3) $\frac{n}{2} = t$ とおくと, $n \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow \infty$ であり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = e^2 \quad \text{答}$$

←(1) より

教 p.99

11. 次の関数を微分せよ。

$$(1) y = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}$$

$$(2) y = x^2(\log x)^3$$

$$(3) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

指針 いろいろな関数の微分 (1), (3) は商の導関数, (2) は積の導関数の公式を使う。

$(\log x)^3$ や e^{-x} の微分には, 合成関数の微分法を考える。

$$\text{解答 (1)} \quad y' = \frac{(1-\tan x)'(1+\tan x) - (1-\tan x)(1+\tan x)'}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1+\tan x)^2} \left(-\frac{1+\tan x}{\cos^2 x} - \frac{1-\tan x}{\cos^2 x} \right)$$

$$= -\frac{2}{(1+\tan x)^2 \cos^2 x}$$

$$= -\frac{2}{(\cos x + \sin x)^2} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\leftarrow \tan x \cos x = \sin x$$

$$(2) \quad y' = (x^2)'(\log x)^3 + x^2 \{(\log x)^3\}'$$

$$= 2x(\log x)^3 + x^2 \cdot 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2x(\log x)^3 + 3x(\log x)^2$$

$$= x(\log x)^2(2\log x + 3) \quad \text{答}$$

$$(3) \quad y' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4e^x e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow (e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}$$

$$\leftarrow e^x e^{-x} = 1$$

$$\text{別解 (1)} \quad y = \frac{2 - (1 + \tan x)}{1 + \tan x} = \frac{2}{1 + \tan x} - 1 \text{ より}$$

$$y' = -2 \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{(1 + \tan x)^2} = -2 \cdot \frac{1}{\{\cos x(1 + \tan x)\}^2}$$

$$= -\frac{2}{(\cos x + \sin x)^2} \quad \text{答}$$

$$(3) \quad \text{分母と分子に } e^x \text{ を掛けると } y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{よって } y' = \frac{2e^{2x}(e^{2x} + 1) - (e^{2x} - 1) \cdot 2e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$= \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \quad \text{答}$$

$$\leftarrow \text{分母・分子に } e^{-2x} \text{ を掛ける}$$

教 p.99

12. 次の関数を微分せよ。

$$(1) \quad y = x^x \quad (x > 0)$$

$$(2) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{(x+2)^2}}$$

指針 対数を利用した微分

(1) $x^x > 0$ であるから、両辺の自然対数を取り、両辺をそれぞれ x で微分する。

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとることで、いくつかの自然対数の和や差で表され、微分しやすくなる。

解答 (1) 両辺の自然対数をとると

$$\log y = \log x^x$$

$\leftarrow x^x > 0$

すなわち $\log y = x \log x$

この両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}$$

よって $y' = (\log x + 1)y$

したがって $y' = x^x (\log x + 1)$ 答

(2) 両辺の絶対値の自然対数をとると

$$\log |y| = \frac{1}{3} (\log |x+1| - 2 \log |x+2|)$$

両辺の関数を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

$$\text{よって } y' = -\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{(x+2)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x}{3(x+1)(x+2)}$$

$$= -\frac{x}{3(x+2)^{\frac{1}{3}}(x+1)^2(x+2)^2} \quad \text{答}$$

教 p.99

13. $x=e^t$, $y=e^{-t}$ であるとき, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ を t の関数として表せ。

指針 媒介変数表示と導関数, 第2次導関数 $x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき

$\frac{dx}{dt}=f'(t)$, $\frac{dy}{dt}=g'(t)$ をそれぞれ求め, $\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$ とすればよい。

$\frac{d^2y}{dx^2}$ は $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$ より求める。

解答 $\frac{dx}{dt}=e^t$, $\frac{dy}{dt}=-e^{-t}$ であるから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{-t}}{e^t} = -e^{-2t} \quad \text{答}$$

また $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx}$

$$= -e^{-2t} \cdot (-2t)' \cdot \frac{1}{e^t} = 2e^{-3t} \quad \text{答}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{e^t} \text{ だよ。}$$



14. 方程式 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ で定められる x の関数 y について, $\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ と表されることを示せ。

指針 x, y の方程式と導関数 y を x の関数と考え, 方程式の両辺を x で微分する。

$$\text{合成関数の微分法により } \frac{d}{dx} y^b = \frac{d}{dy} y^b \cdot \frac{dy}{dx} = b y^{b-1} \cdot \frac{dy}{dx}$$

解答 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ の両辺を x で微分すると

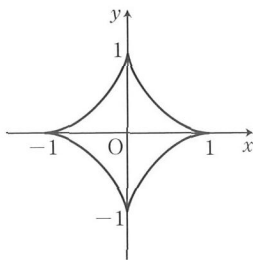
$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

この等式は $x=0$ または $y=0$ のときは成り立たない。

よって, $x \neq 0, y \neq 0$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{y^{-\frac{1}{3}}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{終}$$

【参考】方程式 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ が表す曲線をアステロイドといい, 右図のようになる。



コラム 高木関数

まとめ

高木関数

次のように表すことができる関数 $T(x)$ を高木関数という。

数直線上で x を座標とする点と整数を座標とする点の距離について考えたとき, その最小値を $s(x)$ とする。

$$0 \leq x \leq 1 \text{ で, } t_n(x) = \frac{s(2^n x)}{2^n} \text{ とするとき} \quad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n(x)$$

練習

教 p.100

$y = t_0(x) + t_1(x) + t_2(x)$ のグラフをかいてみよう。

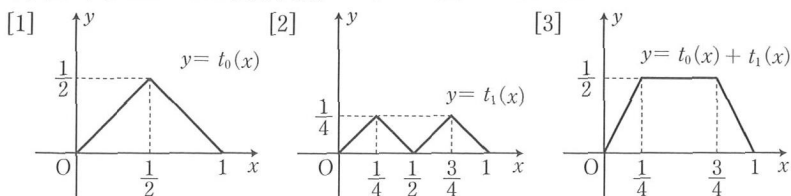
指針 高木関数 $t_0(x) = s(x)$ について考えると, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき $s(x) = x$,

$\frac{1}{2} < x \leq 1$ のとき $s(x) = 1 - x$ と表すことができ, $y = t_0(x)$ のグラフは図[1]の

ようになる。同様にして, $y = t_1(x) = \frac{s(2x)}{2}$ のグラフは図[2]のようになり,

$y = t_0(x), y = t_1(x)$ から $y = t_0(x) + t_1(x)$ のグラフ (図[3]) をかくことができる。

このように $y=t_0(x)+t_1(x)+t_2(x)+\cdots+t_n(x)$ のグラフを考えていくと、 n が大きくなるにつれて高木関数のグラフに近づいていく。



本問では、図[3]を利用して $y=t_0(x)+t_1(x)+t_2(x)$ を求め、そのグラフをかく。

解答 図[3]より、 $t_0(x)+t_1(x)$ は

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき} \quad 2x$$

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{4} \text{ のとき} \quad \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} < x \leq 1 \text{ のとき} \quad -2x+2$$

次に、 $t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2}$ について考える。

$$0 \leq 2^2x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき, すなわち } 0 \leq x \leq \frac{1}{8} \text{ のとき}$$

$$s(2^2x) = 4x \text{ より} \quad t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = x$$

$$\frac{1}{2} < 2^2x \leq 1 \text{ のとき, すなわち } \frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき}$$

$$s(2^2x) = 1 - 4x \text{ より} \quad t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = \frac{1}{4} - x$$

$$1 < 2^2x \leq \frac{3}{2} \text{ のとき, すなわち } \frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{8} \text{ のとき}$$

$$s(2^2x) = 4x - 1 \text{ より} \quad t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = x - \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2} < 2^2x \leq 2 \text{ のとき, すなわち } \frac{3}{8} < x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}$$

$$s(2^2x) = 2 - 4x \text{ より} \quad t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = \frac{1}{2} - x$$

$$2 < 2^2x \leq \frac{5}{2} \text{ のとき, すなわち } \frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{8} \text{ のとき}$$

$$s(2^2x) = 4x - 2 \text{ より} \quad t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = x - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2} < 2^2x \leq 3 \text{ のとき, すなわち } \frac{5}{8} < x \leq \frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$$s(2^2x) = 3 - 4x \text{ より} \quad t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = \frac{3}{4} - x$$

$3 < 2^2x \leq \frac{7}{2}$ のとき, すなわち $\frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{8}$ のとき

$$s(2^2x) = 4x - 3 \text{ より } t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = x - \frac{3}{4}$$

$\frac{7}{2} < 2^2x \leq 4$ のとき, すなわち $\frac{7}{8} < x \leq 1$ のとき

$$s(2^2x) = 4 - 4x \text{ より } t_2(x) = \frac{s(2^2x)}{2^2} = 1 - x$$

以上より, $y = t_0(x) + t_1(x) + t_2(x)$ は

$$0 \leq x \leq \frac{1}{8} \text{ のとき } y = 2x + x = 3x$$

$$\frac{1}{8} < x \leq \frac{1}{4} \text{ のとき } y = 2x + \left(x - \frac{1}{4}\right) = x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} < x \leq \frac{3}{8} \text{ のとき } y = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{4}\right) = x + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{8} < x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき } y = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - x\right) = 1 - x$$

$$\frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{8} \text{ のとき } y = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) = x$$

$$\frac{5}{8} < x \leq \frac{3}{4} \text{ のとき } y = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4} - x\right) = \frac{5}{4} - x$$

$$\frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{8} \text{ のとき } y = (-2x + 2) + \left(x - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} - x$$

$$\frac{7}{8} < x \leq 1 \text{ のとき } y = (-2x + 2) + (1 - x) = 3 - 3x$$

したがって, $y = t_0(x) + t_1(x) + t_2(x)$

のグラフは, 右の図のようになる。

